# Les mathématiques, sciences orphiques

Mallarmé, dans *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard*, est le premier poète à avoir enrôlé des objets mathématiques comme images poétiques. Il est certes évident, depuis les anciens Grecs, que la musique repose sur des lois mathématiques, l’harmonie, et que poésie et « philosophie naturelle » (les sciences, dont les mathématiques) entretiennent un rapport de cousinage. La poésie, comme la musique, est d’ailleurs fondée sur une science du rythme, le « mètre » (qui signifie *mesure* en grec), et toutes trois, poésie, musique et mathématiques appartiennent aux strates les plus élevées de la création intellectuelle. Mallarmé, qui présente son œuvre comme un « *reprendre notre bien*» tantôt à la musique, tantôt à la peinture, voudrait-il en plus annexer les mathématiques ?

L’histoire des mathématiques a de fait quelque chose d’orphique. Au départ (moment 1) l’Idéal euclidien, l’idéalisation directe de l’expérience des architectes et des astronomes babyloniens, égyptiens ou ioniens (à laquelle se joindra plus tard celle des artilleurs). Pour certains sages antiques, la géométrie et l’arithmétique devinrent même une religion non officielle analogue à l’orphisme : la secte des Pythagoriciens, qui finira par fusionner avec le néoplatonisme. Un mathématicien, Nicomaque de Gérase, auteur d’un traité d’harmonie et d’un traité d’arithmétique, en tirera une théorie des rapports entre le monde des Idées platoniciennes et les nombres : l’arithmologie. Cette conception des mathématiques comme idéalisation du réel (plus ou moins « divinisée ») perdurera, élargie indéfiniment, jusqu’aux Temps modernes. Et là, moment 2 : crise de la géométrie euclidienne puis de la théorie naïve des ensembles, fondement de l’arithmétique, du vivant même de Mallarmé. Puis, moment 3 : reconstruction des mathématiques à partir d’une axiomatique, pure « fiction ».

On retrouve là, exactement, la dialectique en trois temps du « matérialisme orphique » de Mallarmé, dont le sonnet *Ses purs ongles très hauts...* est l’allégorie, et que je décrypte dans mon livre, *Ressusciter quand même[[1]](#footnote-1)*: 1. Un Idéal, une réalité idéalisée, un paradis, un éden ; 2. La perte, la destruction , le démenti de cet idéal, par un autre aspect de la réalité (la mort, la bêtise, etc) ; 3. la reconstruction de cet idéal, de ce paradis perdu, mais différemment, comme une fiction consciente : le poème. Et pourquoi pas une théorie mathématique ? Voyons cela.

## Crises des mathématiques, résurrections axiomatiques

Prenons l’exemple d’un objet idéal très simple : la droite, née de l’expérience d’une ligne remarquable, celle que suit le regard ou une ficelle tendue entre deux piquets. Dès la plus haute antiquité on fit l’expérience que les droites « se coupent » soit en un seul point (elles sont dites « sécantes »), soit pas du tout (elles sont dites alors « parallèles »), et que par un point il ne passe qu’une parallèle à une droite. Euclide tenta de démontrer cette dernière propriété, puis demanda, « postula », d’admettre provisoirement que cette propriété était vraie. À partir de définitions et propriétés fondamentales ainsi posées, il construisit une idéalisation de l’expérience, les quelques « axiomes de la géométrie » - dont le 5e est ce fameux « postulat » des parallèles – d’où il est possible de déduire, par la raison et non par l’expérience, une myriade de « théorèmes » comme conséquences logiques. Par exemple :

Axiome 5 : par un point il ne passe qu’une parallèle à une droite

Théorème : si deux droites D1 et D2 sont parallèles, toute droite S qui coupe l’une coupe l’autre.

Démonstration : Soit A le point où la sécante S coupe la première parallèle D1. Si cette S ne coupait pas la seconde parallèle D2, elle lui serait par définition elle aussi parallèle, et par le point A passerait deux parallèles à une même droite. Ce qui est interdit par l’axiome 5.

Avec quelques axiomes supplémentaires, on capture la notion d’angle et on démontre que, de plus, la sécante coupe toute famille de droites parallèles selon le même angle, que deux sécantes découpent sur des droites parallèles des segments proportionnels etc. : résultats indispensables à l’architecture ! Il reste clair, pour Euclide et ses successeurs, que la géométrie, construite à partir de ces axiomes, n’est qu’une idéalisation, une « simplification » du réel, l’espace de la pratique, et qui se « retrempe au réel » (comme dirait Mallarmé) à chaque application : dans l’architecture notamment. Mais toutes les tentatives des savants, en particulier arabes ou persans, pour démontrer le 5e postulat à partir des autres axiomes échoueront.

Lorsque commença l’exploration transocéanique de la Terre, supposée sphérique, il apparut vite que cette « simplification » du réel n’en était plus une pour les grands navigateurs. Au contraire, en naviguant vers l’Amérique au long d’un parallèle à l’équateur, ils coupaient tous les méridiens selon le même angle droit, mais ces méridiens, localement parallèles, se recoupaient tous en deux points : les pôles. Les XVIIe et XVIIIe siècles explorèrent la complexité de cette « géométrie sphérique », où ce qui tient le rôle de « droites » (le plus court chemin d’un point à un autre) sont les grands cercles autour de la sphère terrestre. On ne pouvait plus garder ensemble ces deux propriétés empiriques de la droite : avoir une et une seule parallèle en un point, et être le plus court chemin d’un point à une autre. Les « droites », sur la sphère, n’ont pas de parallèles. En revanche, sur les paraboloïdes hyperboliques (jolies structures que les scouts aiment à construire avec quatre mats et des cordes), il y en a plusieurs en un point. Dès cette époque, quelques mathématiciens, notamment ceux qui essayaient de produire des cartes planes de la sphère terrestre, tels Johann Lambert, se rendirent compte qu’en laissant tomber le 5e postulat on pouvait déduire d’autres théorèmes de géométrie, très intéressants et apparemment sans rencontrer de contradiction.

Enfin, le XIXe siècle sauta le pas et sortit la géométrie de la crise. Le Prince des mathématiciens du siècle, Johann Gauss, n’osa pas publier ses résultats (de 1813), mais Nikolaï Lobatchevski, en 1829, publia une géométrie où en un point peuvent passer plusieurs parallèles à une même droite, et Georg Riemann, en 1867, une géométrie où il n’en passe aucune.

À partir de cette crise, les mathématiciens admirent que les théories qu’ils construisaient à partir d’un ensemble d’axiomes étaient de pures « fictions » au sens de Mallarmé. Les axiomes n’avaient plus besoin d’idéaliser des vérités empiriques : tout ce qu’on leur demandait était de ne pas conduire à des conséquences contradictoires, d’être « cohérents ». Ce qui n’empêche pas les théories mathématiques de pouvoir se « retremper au réel » (la géométrie riemannienne comme géométrie de la sphère, et la géométrie euclidienne comme approximation locale), parfois de manière inattendue. Ainsi, l’invention du nombre imaginaire « i », racine carrée de -1, passa d’abord pour un « truc de calculateur » (l’Italien Jérôme Cardan l’introduisit au XVIe siècle pour résoudre les équations du troisième degré). Puis les nombres et les espaces complexes, construits à partir des nombres réels et imaginaires, furent admis comme de pures fictions… jusqu’à ce que, dans la théorie de la relativité d’Einstein et dans la mécanique quantique de Schrödinger, la nature, à l’échelle de l’astronomie ou du monde subatomique, se trouvât être mieux décrite avec des nombres complexes.

Mieux encore : la logique courante fut formalisée comme une “algèbre de Boole" de ses opérateurs fondamentaux, « non », « ou », « et », que l’on pouvait combiner selon des lois telles que : *Non (p et q ) = (Non p) ou (Non q)*, p et q étant des propositions quelconques. Par exemple : Mon chat n’est pas « noir et mâle » = Mon chat est une femelle *ou* n’est pas noir. Il est clair que le « carré » de Non (la double négation) laisse invariante la proposition sur laquelle il s’applique : *Non (Non p) = p.* Il n’est pas faux que ma chatte soit noire = elle est noire. Mais la « racine carrée de Non » (l’opérateur logique dont le carré serait la négation) n’a aucun sens intuitif. Pourtant, par analogie avec l’invention de i, on a construit une extension de l’algèbre de Boole où un tel opérateur existe : en l’appliquant deux fois de suite on obtient la négation[[2]](#footnote-2). Pure fiction ? Les ordinateurs quantiques, aujourd’hui, réalisent physiquement cette étrange opération.

Mallarmé connaissait-il les travaux de Riemann et Lobatchevski ? Probablement pas, mais sa sensibilité à l’air du temps (le plus grand mathématicien français de son temps, Henri Poincaré, était un fidèle de ses Mardis) lui faisait certainement comprendre les mathématiques comme modèles de « pure fiction retrempable au réel »[[3]](#footnote-3). Cependant, il utilise souvent « l’Infini » comme une métaphore équivalente à l’Azur, l’Espace, la Nue, *ce qui là-haut éclate*, etc. Or « l’Infini » entrait de son vivant dans une crise équivalente à celle de la géométrie. Pour la comprendre, revenons à la droite « naïve », celle du moment 1 de l’idéalisation.

## L’infinité des infinis

Notre institutrice, à l’école communale, nous présenta le point et la droite à peu près comme Euclide l’avait fait : « C’est comme la ligne que vous tracez avec une règle, c’est le plus court chemin d’un point à un autre, mais il faut vous l’imaginer sans aucune épaisseur et prolongée jusqu’à l’infini des deux côtés. » Et elle ajouta une troisième propriété : sa continuité. « Elle est composée de points : quand vous parcourez la droite, vous passez d’un point à un autre ; les points sont comme des taches minuscules, ils n’ont ni épaisseur ni longueur. » Cette idée me plongea dans un abîme de perplexité. J’interrogeai Maman : « Mais comment, avec des points qui n’ont aucune épaisseur, peut-on fabriquer une droite ? On aura beau en mettre beaucoup les uns à côté des autres, on n’arrivera jamais à démarrer ! » Ma mère me répondit « Oui, mais on met une infinité de points ! Et l’infini c’est très grand, plus que tu ne peux imaginer ! » Mon père confirma[[4]](#footnote-4). Je ne fus pas convaincu, car j’avais en tête le modèle d’un collier de perles sans épaisseur, et, pour idée de l’infini, l’infinité des nombres entiers. Et en enfilant des milliards de milliards de perles sans épaisseur, il est évident qu’on n’avance pas, fût-ce d’un milliardième de millimètre.

Cette énigme était en fait déjà résolue par Georg Cantor, inventeur de la théorie des ensembles, depuis 1874, du vivant de Mallarmé. Un ensemble, pour Cantor, est très naïvement l’idéalisation de la notion de collection, rassemblement d’objets quelconques, et son « cardinal », comme en grammaire, est le nombre de ses éléments. Par exemple, l’ensemble des nombres entiers, dont le cardinal est infini. Oui, l’infinité des nombres entiers est très grande, et cet infini, celui du « dénombrable », est déjà déconcertant. Il y a « autant » de nombres pairs que de nombres entiers, et autant de nombres entiers que de nombres rationnels (les fractions)[[5]](#footnote-5) : dans l’Infini, la partie peut être aussi grande que le tout ! Qu’est-ce à dire, d’ailleurs, que deux ensembles sont « aussi grands » ? Que l’on peut établir une correspondance appelée « bijection » (on dit aussi « biunivoque ») entre les éléments de ces deux ensembles, « chacun à chacun » : chaque élément de l’un a son correspondant et un seul chez l’autre. Or Cantor montra que l’ensemble PE des « sous-ensembles » ou « parties » d’un ensemble E (au sens le plus intuitif du mot « partie » : la réunion de plusieurs éléments de E, éventuellement aucun ou tous) est nécessairement plus grand que l’ensemble de départ[[6]](#footnote-6).

À partir de l’ensemble des nombres entiers on peut construire ainsi un ensemble plus grand, l’ensemble de ses parties. Son cardinal est donc plus grand que « l’infini dénombrable », l’on appelle « infini du continu », car on montre qu’il est aussi grand que l’ensemble des points qui « meublent la droite réelle » (selon l’expression imagée de Henri-Léon Lebesgue)[[7]](#footnote-7). Ce qui répond à mes angoisses d’enfant : oui, l’infinité des nombres entiers est trop petite pour compter les points d’une droite, mais on peut fabriquer un autre infini, plus grand et suffisant. Et ainsi de suite : on peut construire une infinité d’infinis de tailles de plus en plus grandes, et développer à leur sujet un champ immense pour les mathématiques. En revanche, on ne peut pas démontrer qu’il n’existe pas d’infini intermédiaire entre l’infini dénombrable et l’infini du continu. Cette hypothèse, dite « du continu », est comme l’axiome des parallèles : on peut construire deux fictions mathématiques différentes, en l’admettant ou pas, et si l’une est cohérente, alors l’autre l’est aussi.

Mais pour Cantor, il s’agissait toujours d’explorer une représentation du réel, en l’occurrence « les ensembles », conçus comme une idéalisation des collections d’objets quelconques : on en restait au « moment 1 » de l’orphisme mathématique. Plusieurs mathématiciens (dont son grand adversaire Kronecker) restaient sceptiques devant cette manière d’explorer l’infinité des infinis avec des concepts formés par notre raison limitée, et prônèrent une mathématique plus « intuitionniste » : n’existent, selon eux, que les objets mathématiques que l’on saurait construire explicitement à partir du « terrain connu ». Ces mathématiques « intuitionnistes » se révélèrent trop pauvres, mêmes pour les mathématiques déjà existantes et « retrempées au réel », et n’eurent guère d’avenir : Cantor l’emporta, dès les années 1890, et la grande majorité des mathématiciens accepta de refonder toutes les mathématiques sur la base de sa théorie des ensembles.

Malheureusement, la crise de la cohérence de la « théorie naïve des ensembles » (celle de Cantor) fut presque immédiate. Ses plus fervents partisans, comme Bertrand Russel, la détectèrent dès 1901 en posant des paradoxes du genre : l'ensemble de tous les ensembles qui ne sont pas éléments d’eux-mêmes est-il élément de lui-même ? Oui et non, par définition. Ce qui ouvrait une grave crise, dite des « fondements des mathématiques ». Le pape des mathématiciens d’alors, David Hilbert, proclama : « Nul ne nous chassera du paradis que nous a ouvert Cantor ! ». C’était reconnaître à la théorie naïve des ensembles, elle aussi, le statut du moment 1 de l’orphisme : un Éden. Et pour sauver cet Éden de l’hydre des paradoxes à la Russel, il fallait reconstruire la théorie des ensembles elle-même comme une pure « fiction », avec des axiomes écartant ces paradoxes, retrempée sans problème dans le réel quand on manipule des ensembles finis, mais dont la retrempe devient plus « fictionnelle » quand on passe aux ensembles infinis.

Les mathématiciens construisirent donc diverses axiomatisations de la théorie des ensembles, ce Paradis perdu de Cantor devenu la base de toutes les mathématiques. La plus courante est l’axiomatique de Zermelo-Fraenkel avec hypothèse du continu, dite ZFC. Ils comptaient bien les justifier par leur seule cohérence. Hélas ! En 1931 Kurt Gödel démontra le « théorème d’incomplétude » : tout système d’axiomes assez riche pour fonder au moins l’arithmétique, par exemple l’axiomatique de Peano, contient nécessairement des propositions indécidables (on ne peut démontrer ni qu’elles sont vraies ni qu’elles sont fausses, ce qui est déjà ennuyeux pour le système d’axiomes, mais ne le rend pas incohérent), et de plus il n’est pas possible de démontrer sa cohérence au moyen de ses seuls axiomes (même s’il est effectivement cohérent). Si on veut aller plus loin, il faut rajouter des axiomes.

Nous n’allons pas étudier comment Gödel démontra son théorème ! Mais la première étape est utile à la compréhension du *Coup de dés*. Gödel proposa un code numérique pour tous les textes de mathématique ou de logique passés ou à venir : à chaque texte correspondait ainsi un nombre unique, ce qui lui permettait de poursuivre sa démonstration uniquement avec des nombres[[8]](#footnote-8). C’est possible parce que tous les textes sont écrits avec un nombre fini de caractères, eux-mêmes en nombre fini dans tous les systèmes d’écriture du monde : les textes sont nécessairement en nombre fini pour le passé, dénombrable pour le futur. Or ce code est tout aussi valable pour les textes littéraires. Le *Mahabharata* a son nombre, *La Divine comédie* le sien… et *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard* pareillement. Ainsi que tous les textes que taperait au hasard un singe sur une machine à écrire, et qui ne veulent rien dire.

Le théorème d’incomplétude frappa au cœur les mathématiciens[[9]](#footnote-9) et provoqua les ricanements des philosophes. Puis on s’y habitua, on finit même par trouver ça normal, voire très beau : le titre de l’ouvrage-culte de [Douglas Hofstadter](https://fr.wikipedia.org/wiki/Douglas_Hofstadter), *Gödel, Escher, Bach : Les Brins d'une Guirlande Éternelle* (1979)est aujourd’hui aussi connu que *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard.* Le Rêve d’une vérité absolue datait de la vision quasi religieuse des mathématiques (leur moment 1). Ce Rêve s’est brisé aux Temps Modernes et à l’époque contemporaine, mais il fut ressuscité sous forme maîtrisée par l’axiomatisation, « glorieux mensonge » qui sait sa cohérence incomplète. Si l’on admet que les mathématiques ne sont que fiction, n’attendons pas d’une fiction qu’elle prouve sa réalité : elle ne peut être prouvée que dans le cadre d’une autre fiction, plus riche.

Et pourtant la « retrempe » existe, et le théorème d’incomplétude se vérifie même dans des jeux mathématiques. Par exemple, « les suites de Goodstein »[[10]](#footnote-10) sont des suites de nombres entiers que peut construire un élève de lycée, à partir d’un nombre entier quelconque. On constate que les plus simples d’entre elles, construites à partir du nombre 10 par exemple, après avoir grimpé comme une fusée vers la banlieue de l’infini, jusqu’à des nombres aux milliards de milliards de chiffres, plafonnent puis retombent implacablement vers zéro (bien sûr il faut utiliser des ordinateurs). On soupçonne que c’est vrai pour tous les nombres de départ. On démontre pourtant que cette propriété est indécidable dans l’axiomatique usuelle de l’arithmétique (celle de Peano). Mais elle devient démontrable si l’on suppose vraie la théorie des ensembles convenablement axiomatisée (par exemple ZFC), et donc l’existence de nombres ordinaux infinis tels que ω et ε0 [[11]](#footnote-11). Pour paraphraser Pierre Dac : « Dénombrer l’infini, c’est long, surtout vers la fin ? Eh bien, commençons par la fin ! » C’est en effet l’esprit de la démonstration, assez simple si l’on admet que l’on peut ranger les infinis dans l’ordre, après nos ordinaux ordinaires.

Voilà donc une propriété des nombres « naturels », ceux qui semblent aussi empiriques que le lever du jour[[12]](#footnote-12), dont on peut se dire « ou c’est vrai ou ce n’est pas vrai », que l’on ne peut pourtant démontrer qu’en utilisant une fiction détachée de l’intuition, et qui a rendu fou son propre inventeur ! Tels sont les parages dans lesquels s’aventure Mallarmé, qui a déjà failli mourir fou dans la rédaction d’*Hérodiade*, avec son *Coup de dés*, « œuvre d’un dément» comme il le confie à Valéry : un poème sur le Hasard et le Nombre. Mais nous n’avons pas encore parlé du hasard et des probabilités, qui progressent à la même époque et avec les mêmes crises que les nombres, les ensembles et leurs infinis.

## La fable des puces et des chiens

Je viens d’évoquer ces textes écrits par des singes (un apologue d’Émile Borel) : « au hasard ». La langue de la tribu utilise « hasard » dans deux sens liés mais différents. Tous deux sont utilisés dans *Un coup de dés*, d’où les contradictions apparentes du poème.

On dit que des évènements arrivent « au hasard» si l’on ne peut identifier des lois déterministes qui les provoqueraient, à partir de l’état présent de l’Univers ou de ses états passés. La chute d’un dé est de ce type. Depuis la fin du XVIIIe siècle, la mécanique newtonienne a pourtant atteint une telle perfection que, si l’on sait à quelle vitesse et sous quel angle et à quelle distance de la table, supposée plane mais non glissante, le dé a été lancé, Pierre-Simon de Laplace peut affirmer que le nombre que présente la face supérieure du dé quand il s’arrête est parfaitement déterminé. Mais voilà : on ne connaît pas exactement ces « conditions de départ » et Henri Poincaré démontre dans les années 1890 que les plus infimes variations de ces conditions initiales peuvent faire basculer le dé, à l’arrivée, sur une face ou sur une autre.

Par ailleurs, quand un événement dépend de deux ou plusieurs chaînes de causalités totalement indépendantes, du moins pour qui ne croit pas que tout est absolument lié par une super-chaîne unique de déterminismes depuis le commencement des temps, on peut dire également que le recoupement des chaînes de causalités est « au hasard ».

Le « hasard 1900 » apparaît ainsi comme une limite que notre ignorance impose au déterminisme. Ce n’est que vers la fin XXe siècle que l’on se convaincra que certains phénomènes physiques (telle la désintégration d’un atome radioactif) sont vraiment indéterminés, arrivent « au hasard »[[13]](#footnote-13). Bien entendu, la sagesse populaire, comme la théorie de l’évolution de Darwin, n’avaient pas attendu pour « croire au hasard ».

Ce qui n’empêche pas le hasard d’avoir ses lois : le « calcul des probabilités ». On pose alors une axiomatique, on invente une fiction : qu’il existe des dés ayant une probabilité égale de tomber sur chacune de leurs six faces. On dit que ces évènements sont équiprobables, et on n’a pas besoin de dire pourquoi. D’où l’on peut calculer la probabilité que deux dés forment, par sommation, les nombres 2, 7 ou 12. Il y a ainsi six fois plus de chances de faire un « sept » qu’un « douze » ou un « deux »[[14]](#footnote-14).

Mais certains résultats du hasard, heureux ou malheureux, sont plus remarquables, significatifs que d’autres. Par exemple faire la somme 12 avec deux dés, ou la figure 421 avec trois dés. On dit alors « C’est LE hasard», sauf si l’on soupçonne que le lanceur des dés est un expert qui sait lancer les dés « pas tout à fait AU hasard ». « C’est le hasard» ne veut pas dire la même chose que « C’est au hasard». La rencontre fortuite d’un parapluie et d’une machine à coudre sur une table de dissection, la rencontre d’un dragon et d’un avocat aux pieds plats au long du quai Malaquais, « c’est le hasard », qui « fait bien les choses ». On peut tout aussi bien dire que « c’est la destinée » : c’est dû au hasard, c’est peu probable, mais c’est remarquable, du moins aux yeux de poètes comme Lautréamont et Guy Béart.

À l’époque de Mallarmé, la physique épousait le hasard avec la mécanique statistique (la théorie cinétique des gaz) de Ludwig Boltzmann. Il s’agissait d’expliquer les lois macroscopiques de la thermodynamique (établies en 1824 par Sadi Carnot), celles des machines à vapeur, par le mouvement aléatoire de microscopiques particules de la vapeur. Or la théorie atomique elle-même était encore très loin de faire consensus ! En 1907, les époux Paul Ehrenfest et Tatiana Afanassieva, amis d’Einstein[[15]](#footnote-15), conçurent, pour défendre les idées de Boltzmann, un conte très riche, dit « des chiens et des puces » (ou « des urnes », ce qui est moins poétique). Cet apologue va nous éclairer sur le double sens du mot *hasard* et sur les grandes phrases mystérieuses du *Coup de dés*.

Un dresseur de puces les héberge sur deux chiens, Azor et Babar. Les puces sont simplement numérotées : Une, Deux, etc. Il leur a appris à sauter d’un chien à l’autre à l’appel de leur numéro. Il dispose d’une machine à tirer les nombres au hasard[[16]](#footnote-16). Les puces sont d’abord toutes rassemblées sur Azor. Puis toutes les secondes le dresseur aboie le numéro dicté par le hasard.

Dès qu’il y a deux puces, les choses intéressantes apparaissent. À la première étape, une puce saute sur Babar. À la deuxième seconde, soit elle est appelée à revenir sur Azor, soit l’autre puce est appelée à la rejoindre sur Babar, en tout cas elles sont toutes deux sur le même chien. À la troisième seconde, elles sont obligatoirement réparties sur les deux chiens et nous sommes revenus à la situation de la première seconde. Toute la suite ne peut que reproduire le même cycle[[17]](#footnote-17).

Macroscopiquement (c’est-à-dire si nous ne savons pas distinguer les deux puces à leurs dossards), il n’y a que trois distributions possibles : les puces réparties sur les deux chiens, les puces sur Babar, les puces « revenues » sur Azor. La première représente 50 % des probabilités (des chances d’avoir lieu), les deux autres chacune 25 %. Pourquoi la première est-elle plus probable que les deux autres ? Parce qu’elle peut être réalisée par deux cas de figure, deux « complexions »[[18]](#footnote-18) : soit c’est la puce Un qui est sur Azor, soit c’est la puce Deux. Alors que les deux autres distributions ne sont réalisées, par définition, que pour une seule complexion (les deux puces sur Azor ou alors sur Babar). Or ce sont les complexions qui sont équiprobables ![[19]](#footnote-19)

Avec deux puces seulement apparaissent ainsi plusieurs lois du hasard :

* À tout moment, la distribution la plus probable est une répartition égalitaire entre les deux chiens, parce que cette distribution est réalisée par un plus grand nombre de complexions.
* De temps en temps mais plus rarement, il y aura nécessairement retour à une situation « remarquable », où toutes les puces se retrouvent sur Azor : un coup sur deux elles sont sur le même chien, et il y a une chance sur deux que ce soit Azor, soit en moyenne tous les 4 coups.

Essayez avec quatre puces, dix puces, cent puces : les distributions où les puces sont réparties à peu près également entre les deux chiens atteignent rapidement, quand croît le nombre de puces, une probabilité écrasante, car le nombre de complexions qui les réalise croît plus qu’exponentiellement et dépasse vite le nombre de protons et de neutrons dans l’Univers. Des nombres si immenses, que l’on ne parvient plus à les noter avec les moyens ordinaires de la numération « arabe » ni même « polonaise ». Et ces distributions où les puces sont également réparties sont stables, comme la position d’une bille au fond d’un bol, en ce sens qu’une sorte de force d’attraction tend à ramener la distribution des puces vers cette configuration centrale.

Voyons le cas de 10 puces. La grande différence avec 2 puces, c’est qu’il existe une période initiale d’au moins cinq étapes pour que la moitié des puces arrive à migrer vers Babar. « Au moins » car certaines peuvent être déjà rappelées vers Azor avant même qu’il y ait 5 puces sur Babar. C’est ce qu’on appelle le « temps de relaxation ». Mais à chaque tirage au sort, la probabilité pour qu’une puce ait à quitter le chien où les puces sont les plus nombreuses est évidemment plus grande que la probabilité pour qu’une puce quitte le chien qui en a le moins. C’est une autre façon de comprendre pourquoi la distribution « centrale » (autant de puces sur les deux chiens) semble s’établir à l’issue du temps de relaxation, et se rétablir dès qu’on s’en écarte.

Dans cette distribution centrale, l’information « qui est sur quel chien » est complètement perdue de vue. C’est le chaos, indifférencié, et le nombre de complexions qui la réalise définit l’entropie, mesure du désordre, dont Mallarmé n’ignore sans doute pas (cela date de Carnot) que sa croissance indéfinie est le destin de mort promis à toute chose[[20]](#footnote-20). La distribution où les puces sont presque uniformément réparties (à quelques puces près) sur les deux chiens, sans qu’on sache qui est où, représente un maximum d’entropie. Elle est le résultat de l’appel des puces « au hasard », elle est stable, mais c’est la stabilité de la mort, du néant, car on n’y distingue plus aucun ordre. *Excepté* que le retour, *peut-être*, de toutes les puces sur Azor, retour à une distribution parfaitement ordonnée réalisée par une complexion unique, qui ne peut être aucune autre, reste toujours possible, quoique de plus en plus improbable[[21]](#footnote-21) : « Ce serait le hasard ! » Mais ce « retour » arrive nécessairement si l’on attend assez longtemps.

Mark Kac a montré que le temps moyen de retour de toutes les puces sur Azor est 2N, N étant le nombre de puces. On vient de le constater pour N = deux puces : en moyenne il faut 4 étapes. Pour 10 puces, il faut déjà attendre en moyenne 1024 secondes (17 minutes), pour 100 puces : 40 000 milliards de milliards d’années. Rappelons qu’on estime aujourd’hui l’âge de l’univers à 13,8 milliards d’années… Or l’apologue des puces et des chiens illustre par exemple l’expérience physique de cinétique des gaz où, dans une boîte à deux compartiments A et B, on met du gaz dans A (de la vapeur d’eau par exemple) et on fait le vide dans B, puis on ouvre une trappe entre les deux. Dans 18 grammes de vapeur d’eau il y a (c’est le nombre N) non pas cent molécules, mais six cent mille milliards de milliards de molécules ! Oui, un jour, après bien, bien des vies de l’Univers, ou plutôt de Multivers, il arrivera sûrement que toutes les molécules d’eau reviennent dans le premier compartiment A. « Ce sera le hasard ». Mais nous serons tous morts.

Cette idée a une traduction littéraire bien connue, formulée par Émile Borel (*Le Hasard*) : un singe tapant indéfiniment sur un clavier finira nécessairement par taper *Hamlet*, et même une infinité de fois. Mais entre deux « succès », même s’il tape une lettre toutes les nanosecondes, il lui faudra plus que l’âge actuellement estimé de l’Univers. Il lui faudra un peu moins longtemps pour taper *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard*, même avec les instructions typographiques. Et chaque fois qu’il y arrivera, « ce sera le hasard »…

Il faudrait un démon (le démon de Maxwell), doté d’énergie et d’information, pour ranger consciemment les puces sur Azor, les molécules dans le compartiment A, et guider les doigts du singe pour taper *Hamlet*. Cette idée est la source de la théorie de l’information de Pierre Shannon (1948) : l’information transmise est ce qui échappe au bruit, à l’entropie maximale d’un chaos de lettres ou de bits informatiques émis « au hasard » (la « neige » de la télévision). Comme quand un homme écrit *Hamlet*, le signe et le fait jouer, non pas bien après la fin des temps, mais au siècle d’Élisabeth Ire. Comme l’identification de la Grande Ourse dans les myriades d’étoiles du ciel nocturne. Comme la rédaction de *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard*.

Émile Borel conclut *Le Hasard* (1914) par une page splendide sur la capacité d’un démon de Maxwell (la raison humaine, ou des êtres encore plus intelligents quoique plus petits que nous) à contredire ainsi le principe de Carnot : l’évolution irréversible de l’Univers vers l’état de hasard, de désordre, d’entropie maximale. Il conclut que le principe de Carnot prévaudra à l’échelle cosmologique, mais n’exclut pas que, dans un petit espace de l’Univers, *bulle de silence dans le désert des bruits,* la Raison soit capable d’établir de l’ordre, de la culture…

Les considérations cosmologiques de Borel ont vieilli : un an plus tard, avec la relativité générale, Einstein offrira le premier cadre mathématique pour une cosmologie scientifique. Et, un siècle plus tard encore, nous sommes complètement perdus : une « matière noire » semble resserrer inexplicablement les galaxies sur elles-mêmes, et une « énergie noire » du vide semble, tout aussi inexplicablement, les écarter les unes des autres en un mouvement d’expansion accélérée de l’Univers. Mais *Le Hasard* d’É. Borel, résumé du hasard « 1900 », est en parfaite résonnance avec le poème final de Mallarmé , *Un coup de dés jamais n’abolira le hasard* : triomphe global « du » hasard, du Néant, possibilité d’une constellation, d’un poème intemporel — mais ce sera « le » hasard…[[22]](#footnote-22)

1. Éditions Le temps des cerises, 2020, <http://lipietz.net/Ressusciter-quand-meme-Le-materialisme-orphique-de-Stephane-Mallarme> [↑](#footnote-ref-1)
2. De même on a construit des algèbres logiques qui capturent plus ou moins bien la dialectique hégélienne, où la négation de la négation n’est pas exactement le retour à l’identique. Voir Jean-Michel Counet, « La formalisation de la dialectique de Hegel. Bilan de quelques tentatives », *Logique & Analyse* n°218, 2012. [↑](#footnote-ref-2)
3. Le livre de H. Poincaré, *La science et l’hypothèse* (rééd. Champs/Flammarion 1968) traite de la plupart des sujets de ce chapitre, selon une conception proche de la notion de « fiction retrempable ». Par exemple, s’agissant de l’infini continu dont il va être question, il écrit (p. 55) : « Le continu mathématique n’est qu’un système particulier de symboles. Sa puissance n’est limitée que par la nécessité d’éviter toute contradiction ; mais l’esprit n’en use que si l’expérience lui en fournit une raison. » On vérifie que tous les chapitres du livre ont été publiés du vivant de Mallarmé, à l’exception des derniers : bien sûr celui sur la relativité restreinte, mais aussi celui sur les probabilités. Il y traite notamment de la « probabilité de découvrir quelque chose » (d’aboutir dans ses recherche), qui est bien le problème de *Un coup de dés*. [↑](#footnote-ref-3)
4. Il m’offrit plus tard, pourtant, son exemplaire d’un merveilleux petit livre répondant à ma question, qu’il avait gardé pour moi depuis sa jeunesse : *L’espace et le temps* du grand mathématicien (et européiste) Émile Borel (Librairie Félix Alcan, 1923). Livre très « littéraire » que je ne saurais trop recommander pour approfondir ce chapitre, comme son livre *Le hasard* (Félix Alcan, 1914). E. Borel partage avec H. Poincaré l’idéal de mathématiques fictionnelles mais retrempables au réel, et ils représentent typiquement « l’air du temps » mathématique 1900 en France, dont Mallarmé a pu « jouir sans l’étudier ». [↑](#footnote-ref-4)
5. On peut écrire toutes les fractions dans un tableau à double entrée : leur numérateur (horizontalement) et leur dénominateur (verticalement). Et on peut les compter en diagonales successives, en commençant par l’origine : 1, ½ , 2, 1/3, 2/2, 3, etc., en ignorant les nombres qui sont déjà pointés (2/2 =1). On peut ainsi les compter toutes, donc il n’y en a pas plus que de nombres entiers. [↑](#footnote-ref-5)
6. Voici une démonstration facile (qui n’est pas celle, très féconde, de Cantor, dite « de la méthode diagonale »). Soit un ensemble E d’éléments *e*, et PE l’ensemble de ses parties. Les éléments de PE sont les parties A de E. Supposons qu’une bijection existe entre PE et E. À tout élément A de PE correspond un élément *a* de E. Mais *a* peut être contenu ou non dans le sous-ensemble A. Soit N l’élément de PE (et sous-ensemble de E) qui contient tous les éléments de E qui ne sont pas contenus dans leur propre correspondant dans PE. Soit *n* le correspondant de N dans E par la bijection de PE vers E. N contient-il *n* ? Supposez que oui, puis que non, et éclatez de rire. Une telle bijection ne peut donc pas exister. (La simplicité apparente de cette démonstration masque la nécessité, quand on raisonne sur des ensembles infinis, d’admettre « l’axiome de choix ».) [↑](#footnote-ref-6)
7. La citation de H-L Lebesgue (homme de devoir et d’humour que j’imagine fort semblable à Mallarmé) est tirée des *Leçons sur les constructions géométriques*, Paris, Gauthier-Villars, 1950. Pour les amateurs, voici un schéma de la démonstration. Un sous-ensemble S de l’ensemble des nombres entiers peut se définir par une suite finie ou infinie de 1 et de 0 (1 quand l’entier appartient à S, sinon 0). Mais cette suite à son tour peut être lue comme une coordonnée, écrite en base 2, d’un point entre 0 et 1 sur « l’axe des x » de la géométrie analytique de Descartes. (En fait il a fallu le travail d’Augustin Cauchy au début du XIXe siècle pour montrer que ces « infinités de chiffres après la virgule » atteignent effectivement tous les points de la « droite mathématique », continue, celle de Descartes. C’est aujourd’hui de niveau Bac +1). Et donc, l’ensemble des parties de l’ensemble des nombres entiers est bien « aussi grand » que l’ensemble des points de la droite entre l’origine et le point d’abscisse 1. Ensuite une petite bijection géométrique « polaire » montre qu’il y a autant de points sur un segment de droite que sur toute la droite.

   Quant à savoir si les droites « de la nature » sont vraiment continues, c’est une question que soulevait Borel et qui n’est toujours pas résolue, du fait de la difficulté de concilier la relativité générale et la mécanique quantique. Depuis l’Antiquité, certains préfèrent donner une épaisseur aux points plutôt qu’imaginer des infinis plus grands que le dénombrable : ils seraient probablement ravis de découvrir la « gravitation quantique à boucle » et ses atomes d’espace. J’aurai grand regret de quitter le monde avant que ce point ne soit éclairci. [↑](#footnote-ref-7)
8. Le petit livre de Péter Rosza, *Jeux avec l’infini* (trad. au Seuil), merveilleuse introduction aux mathématiques pour les littéraires, va jusqu’à indiquer le principe de ce codage. Mais aujourd’hui tous les livres imprimés par une technique informatisée – y compris celui-ci ou une édition quelconque du *Coup de dés*, sont codés, indications typographiques comprises, comme une suite unique de 1 et de 0 : un nombre entier écrit en binaire. [↑](#footnote-ref-8)
9. Dès 1936, le mathématicien Gerhard Gentzen démontre la cohérence de l’arithmétique de Peano, mais en utilisant un principe de récurrence « jusqu’à ε0», le premier nombre ordinal au-delà d’une infinité d’infinité d’infinités… [répété une infinité dénombrable de fois]… d’infinités d’infinis. Un « nombre ordinal » a le même sens qu’en grammaire (premier, deuxième, etc), il traduit la notion d’ordre (« le suivant », « plus petit », etc.) L’ordinal ωdont il est question plus loin est le premier ordinal rangé après la suite infinie de nos ordinaux usuels. Le raisonnement par récurrence consiste à dire « *Si une propriété est vraie pour le nombre 1, et si, quand elle est vraie pour un nombre, elle est vraie pour le suivant, alors elle est vraie pour tous les nombres*. » Ce principe de récurrence relève de la logique, et peu de mathématiciens sont prêts à admettre que nous avons le droit d’utiliser la notion de « le suivant » jusqu’à des ordinaux aussi incompréhensibles que ε0 ! Mais on devine combien Mallarmé aurait « joui sans les apprendre » de ces fictions. [↑](#footnote-ref-9)
10. Voir ces mots dans Wikipedia, qui donne les règles du jeu et les premiers exemples, puis esquisse les démonstrations de ce qui suit. [↑](#footnote-ref-10)
11. Voir la note 8. [↑](#footnote-ref-11)
12. On appelle ainsi les nombres entiers sauf zéro (1, 2, 3…, 8627, …), en considérant qu’ils ne sont pas une invention des hommes, mais de Dieu, ou si vous voulez de la Nature. Voir la discussion philosophique sur ce caractère « naturel » dans : Frédéric Patras, *La Possibilité des nombres*, PUF, 2014, et surtout Marco Panza et Andrea Sereni, *Introduction à la philosophie des mathématiques*, Champs/Flammarion, 2013. Je suis probablement, selon leur classification, un « structuraliste non éliminatif » : je crois que les « petits » nombres entiers sont des réalités naturelles, avec les propriétés expérimentales des collections d’objets réels, les autres sont engendrés par l’axiomatique, mais toujours « retrempables » dans le réel. Les paléoanthropologues découvrirent avec scepticisme l’« Os d’Ishango », vieux de 20 000 ans, sur lequel semble gravé la liste des « nombres premiers » (c’est à dire divisibles seulement par 1 ou par eux-mêmes) jusqu’à 19. Il leur parut impossible que les hommes du paléolithique aient eu la notion de « nombre premier ». Pourtant, il est normal qu’une femme ou un homme chargé de répartir les fruits de la cueillette ait découvert un jour que dans certains cas on ne peut pas les répartir en tas égaux, et ait noté sur un os la liste des premiers de ces cas. Ce n’est quand même pas plus difficile que de peindre la grotte Chauvet ! Autre chose est de raisonner sur eux comme le faisaient déjà les anciens grecs, jusque dans les parages de Aleph-zéro (le cardinal de l’infini dénombrable). [↑](#footnote-ref-12)
13. Nous revenons dans la quatrième partie de *Ressusciter quand même* sur ces nouvelles fortunes du hasard. Pour une très brève introduction, voir *Annexe 26-B, Le hasard physique au XXe siècle,* dans <http://lipietz.net/Ressusciter-quand-meme-Annexe> [↑](#footnote-ref-13)
14. En effet, avec un dé rouge et un dé vert et en énonçant le résultat du lancer dans cet ordre, faire 6 (rouge) et 6 (vert) est aussi probable que de faire 6 et 1. Mais il existe 5 autres manières, toutes aussi probables, de faire 7, alors qu’il n’y qu’une manière de faire 2 ou 12. Quentin Meillassoux relève que Mallarmé s’est d’abord trompé dans ce calcul, avant de se corriger : preuve qu’il étudiait la question. [↑](#footnote-ref-14)
15. J’ai dit, *Annexe 19-B (*[*http://lipietz.net/Ressusciter-quand-meme-Annexe*](http://lipietz.net/Ressusciter-quand-meme-Annexe) *)*, les malheurs de cette famille. [↑](#footnote-ref-15)
16. De telles machines apparaissent à la télévision pour le loto, ou sur nos calculettes. La difficulté est qu’une machine obéit à des lois déterministes : les ingénieurs ont bien du mal à lui faire tirer des nombres « au hasard ». On parle de « pseudo-hasard », qui imite le hasard selon des critères précis. [↑](#footnote-ref-16)
17. Pour être honnête : j’introduis ici subrepticement l’idée que c’est la même chose de regarder de nombreuses expériences en parallèle ou faire des sondages de temps en temps sur la même expérience répétée (« hypothèse ergodique »). [↑](#footnote-ref-17)
18. La terminologie complexion / configuration / distribution / répartition n’est pas stable dans la littérature scientifique. [↑](#footnote-ref-18)
19. Souvenons-nous pourquoi la somme 7 est, avec deux dés, six fois plus probable que 12. [↑](#footnote-ref-19)
20. L’Entropie d’un système vaut k fois le logarithme du nombre de complexions, k étant la constante de Boltzmann, l’une des constantes fondamentales de la Nature, comme la constante de gravitation ou la vitesse de lumière. En fait l’apologue des Ehrenfest visait surtout à faire comprendre cette évolution irréversible vers l’entropie maximale, alors même que le jeu des puces reste théoriquement réversible (elles peuvent revenir toutes sur Azor) : c’est l’établissement d’un lien entre hasard, entropie et « flèche du temps ». [↑](#footnote-ref-20)
21. Il en est de même évidemment pour toute autre complexion remarquable, par exemple « toutes les puces paires sur Azor, et toutes les puces impaires sur Babar », qui est exactement aussi improbable que « toutes sur Azor ». La notion d’ordre « remarquable » est aussi subjective que la beauté d’un poème. [↑](#footnote-ref-21)
22. Mallarmé a-t-il pu « jouir sans les étudier » des réflexions de Borel ? Probablement pas (avant 1897, où il arrive en poste à Paris, Borel travaillait sur d’autres sujets), mais il suffit que Mallarmé ait fréquenté Henri Poincaré. Quant à É. Borel, il sera ami de Paul Valéry. [↑](#footnote-ref-22)